Teoria miary
WPPT/SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
WYKŁAD 13. Miary produktowe i Twierdzenie Fubiniego

11/12/06

Sigma-ciało produktowe i miara produktowa
Dane są dwie przestrzenie miarowe $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. W produkcie kartezjańskim $X \times Y$ określamy tzw. *sigma-ciało produktowe* oznaczane przez $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ w dwóch krokach:
1. Najpierw definiujemy *prostokąty mierzalne* jako zbiory postaci $A \times B \subset X \times Y$, gdzie $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$.
2. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ definiujemy jako sigma-ciało generowane przez rodzinę wszystkich prostokątów mierzalnych.

Następnie, na tym sigma-ciele chcemy zdefiniować miarę produktową oznaczaną przez $\mu \times \nu$ w taki sposób aby na prostokątach mierzalnych obowiązywała zasada „miara prostokąta jest iloczynem miar jego boków": $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Miarę taką skonstruujemy przy pomocy następującego twierdzenia. Zakładamy w nim, że μ i ν są miarami *sigma-skończonymi*, tzn., że przestrzeń X jest sumą przeliczalną zbiorów o mierze μ skończonej (analogicznie dla Y). (Na przykład miara Lebesgue'a na prostej jest sigma-skończona).

Twierdzenie Fubiniego dla zbiorów. *Dla każdego $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$*

(1) *Tzw.* **cięcia** $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ *są $\mathcal{G}$-mierzalne dla μ-prawie każdego x, analogicznie, cięcia E_y są $\mathcal{F}$-mierzalne dla ν-prawie każdego y,*
(2) *funkcja $x \mapsto \nu(E_x)$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna na X, analogicznie, funkcja $y \mapsto \nu(E_y)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna na Y,*
(3) $\int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E_y)\, d\nu(y)$.

Wzór $\xi(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x)$ $\left(= \int \mu(E_y)\, d\nu(y)\right)$ określa miarę na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ spełniającą na prostokątach mierzalnych wzór $\xi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Miarę tę będziemy oznaczać przez $\mu \times \nu$ i nazywać miarą produktową.

Szkic dowodu. Załóżmy najpierw, że μ i ν są skończone. Rozpatrzmy klasę $\mathcal{K}$ zbiorów E, dla których zachodzi (1)–(3). Trzeba pokazać, że klasa $\mathcal{K}$ zawiera σ-ciało generowane przez prostokąty mierzalne.
(a) Prostokąty mierzalne $A \times B$ $(A \in \Sigma_A, B \in \Sigma_B)$ są w tej klasie, bo $E_x = B$ dla każdego $x \in A$ i $E_x = \emptyset$ dla $x \notin A$, $\nu(E_x) = \nu(B)\mathbf{1}_A(x)$, $\int \nu(E_x)\, d\mu = \mu(A)\nu(B)$ i to samo dostaniemy po zmianie stron.
(b) $\mathcal{K}$ jest zamknięta na skończone sumy rozłączne: tak, bo (1) jest oczywiste dla dowolnych sum nawet przeliczalnych, (2) zachodzi dla sum, bo przy rozłączności funkcje te się sumują, a (3) zachodzi z liniowości całki (nie korzystamy tu jeszcze ze skończoności miar).
(c) $\mathcal{K}$ jest zamknięta na dopełnienia: (1) oczywiste, w (2) i (3) przez odejmowanie od stałej (tu korzystamy ze skończoności).
(d) $\mathcal{K}$ jest rodziną monotoniczną: tak, bo (1) oczywiste, w (2) i (3) dla ciągów wstępujących z tw. Leb. o zb. monotonicznej (nie korzystamy z σ-skończoności), dla zstępujących - przez dopełnienia (tu korzystamy).

(e) $\mathcal{K}$ zawiera skończone sumy prostokątów: tak, bo taka suma jest też skończoną sumą rozłączną (innych) prostokątów.
Z tego wynika, że $\mathcal{K}$ zawiera ciało generowane przez prostokąty i jest rodziną monotoniczną, a zatem zawiera σ-ciało generowane przez prostokąty.
Dla miar σ-skończonych produkt rozpada się na przeliczalną rozłączną sumę prostokątów o mierze produktowej skończonej. Każdy zbiór E mierzalny w produkcie rozpada się na przeliczalną sumę przekrojów z tymi prostokątami. Każdy z tych przekrojów spełnia (1)–(3), a więc E, jako przeliczalna suma rozłączna - również (patrz (b) i część (d) gdzie nie korzystaliśmy z σ-skończoności).

Teraz, aby pokazać, że wzór $\xi(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x)$ definiuje miarę, sprawdzamy, że na zbiorze pustym jest to oczywiście zero, monotoniczność jest też oczywista, zostaje przeliczalna addytywność. Ta jednak wynika z prostej obserwacji, że cięcie w x przeliczalnej sumy rozłącznej zbiorów jest równe przeliczalnej i rozłącznej sumie cięć tych zbiorów w x, zatem pod całką mamy przejście do szeregu, natomiat to, że z szeregiem można wyjść przed całkę wynika z liniowości całki i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. $\square$

Poniżej przez funkcję "całkowalną" rozumiemy f mierzalną, taką że przynajmniej jedna z całek $\int f^+\, d\mu$ i $\int f^-\, d\mu$ jest skończona. W tym sensie każda mierzalna funkcja nieujemna jest całkowalna (tylko, być może w sensie niewłaściwym).

Twierdzenie Fubiniego dla funkcji (główne)**.** *Jeśli $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ jest całkowalna względem miary produktowej, to funkcje jednej zmiennej (tzw.* **cięcia***)*

$$f_y(x) := f(x,y) \ \textit{(przy ustalonym } y\textit{)} \quad \textit{(oraz analogicznie } \ f_x(y) := f(x,y)\textit{)}$$

są $\mathcal{F}$-mierzalne i μ-całkowalne dla prawie każdego y ($\mathcal{G}$-mierzalne i ν-całkowalne dla prawie każdego x). Funkcja

$$\varphi(y) = \int f_y\, d\mu \quad \textit{(oraz analogiczna } \ \psi(x) = \int f_x\, d\nu\textit{)}$$

jest $\mathcal{G}$-mierzalna i ν-całkowalna ($\mathcal{F}$-mierzalna i μ-całkowalna) oraz zachodzą równości

$$\int f\, d(\mu\times\nu) = \int \varphi\, d\nu = \int \psi\, d\mu.$$

UWAGA: Inaczej można to zapisać tak:

$$\int f\, d(\mu\times\nu) = \int \left[\int f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int \left[\int f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x).$$

Mówimy, że całka po mierze produktowej jest równa *całkom iterowanym.*

Dowód. W myśl twierdzenia Fubiniego dla zbiorów, twierdzenie funkcyjne zachodzi dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych (należących do σ-ciała produktowego). Z liniowości całki to samo jest prawdą dla nieujemnych funkcji prostych (założenie nieujemności chroni nas przed wyrażeniami nieoznaczonymi). Każda funkcja mierzalna nieujemna jest granicą monotoniczną (niemalejącą) nieujemnych funkcji prostych. Wszystkie sformułowania tezy zachowują się przy braniu granic niemalejących funkcji nieujemnych. Dla funkcji znakowanych postępujemy tak: $f = f^+ - f^-$ i co najmniej jedna z całek względem miary produktowej jest skończona. Na przykład niech $\int f^+ \, d(\mu \times \nu) < \infty$ (dla f^- dowód jest taki sam). Po pierwsze zauważamy, że $(f^+)_y = (f_y)^+$ dla każdego y (i to samo dla f_x). Podobnie zauważmy, że $\varphi^+(y) \leq \int f_y^+ \, d\mu$ bo funkcja po prawej jest nieujemna i po odjęciu od niej analogicznej funkcji zrobionej z f^- otrzymamy φ. Ponieważ f^+ jest nieujemna, to wiemy już, że

$$\infty > \int f^+ \, d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f_y^+ \, d\mu \right] d\nu \geq \int \varphi^+(y) \, d\nu.$$

W szczególności oznacza to, że φ jest ν-całkowalna (bo przynajmniej jedna z całek z φ^+ i φ^- jest skończona). Ponadto funkcja podcałkowa całki zewnętrznej (drugiej całki w ostatnim wzorze) musi być skończona ν-prawie wszędzie:

$$\int f_y^+ \, d\mu < \infty \quad \text{dla } \nu\text{-prawie każdego } y.$$

To z kolei oznacza, ze dla takich y funkcja f_y jest μ-całkowalna (bo nie obie całki z f_y^+ i f_y^- są nieskończone). Analogicznie dowodzi się całkowalności funkcji ψ i f_x dla μ-prawie każdego x. Skoro zachodzą całkowalności, to równość odpowiednich całek wynika już z liniowości całki. $\square$

UWAGA: Istnienie i równość całek iterowanych nie wystarcza do całkowalności funkcji na produkcie. Będą na to przykłady na liście zadań.